PART4　2次関数のグラフと x 軸の位置関係

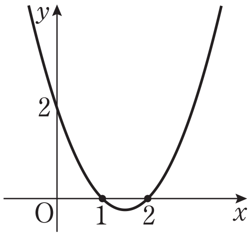
要点① 2次関数のグラフと x 軸の位置関係

2次関数 $y=x^2-3x+2$ のグラフと x 軸の位置関係は，右図のように「　　　　　　　　　　　　　」。

右図の2つの　　　　の x 座標は，2次方程式

x^2-3x+2

の「　　　　　　　　　　　　　　　」$x=1$，2 である。

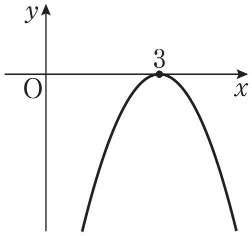


2次関数 $y=-x^2+6x-9$ のグラフと x 軸の位置関係は，右図のように　　　　　　　をただ1つもつ。このとき，2次関数のグラフは，x 軸に「　　　　　　」といい，その共有点を「　　　」という。

右図の接点の x 座標は，2次方程式

$-x^2+6x-9$

の「　　　」$x=3$ である。



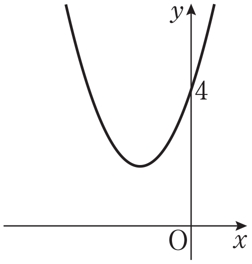
2次関数 $y=x^2+3x+4$ のグラフは，右図のように x 軸と「　　　　　　　　　　　　」。

このとき，2次方程式 x^2+3x+4　　を解の公式を用いて解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{-7}}{2}$$

となり，根号の中，すなわち　　　　　　　が　　となる。

よって，この方程式は「　　　　　　　　　　　　　」。



以上より，2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，グラフと x 軸の共有点の個数，すなわち2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の個数を調べることでわかり，その個数は，判別式 $D=b^2-4ac$ の符号によって決定する。よって，次のように整理される。

$D=b^2-4ac$ の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
グラフと x 軸の共有点の個数	2個	1個	0個
x 軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない

[MEMO]

4 (1) 次の 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を調べよ。

(i) $y=2x^2-5x+2$　　(ii) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x-\dfrac{1}{2}$　　(iii) $y=x^2+6x+10$

(2) 2 次関数 $y=x^2+2x+m$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べる。

D　　$\Longleftrightarrow$

D　　$\Longleftrightarrow$

D　　$\Longleftrightarrow$

} D　　$\Longleftrightarrow$

第 9 講 PART4 確認問題

1 2 次関数 $y=x^2+3x+4$ のグラフと x 軸の位置関係は，

[ア]。

[ア] は，次の①～③のうちから選べ。

① 異なる 2 点で交わる　② 接する

③ 共有点をもたない

2 2 次関数 $y=x^2-x+\frac{1}{4}$ のグラフと x 軸の位置関係は，

[イ]。

[イ] は，次の①～③のうちから選べ。

① 異なる 2 点で交わる　② 接する

③ 共有点をもたない

3 2 次関数 $y=2x^2+3x+1$ のグラフと x 軸の位置関係は，

[ウ]。

[ウ] は，次の①～③のうちから選べ。

① 異なる 2 点で交わる　② 接する

③ 共有点をもたない

4 2 次関数 $y=2x^2-4x+m$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を次の①～④のうちから選べ。[エ]

① $m>1$　② $m<1$

③ $m>2$　④ $m<2$

PART4　2 次関数のグラフと x 軸の位置関係

4　(1)　次の 2 次関数のグラフと x 軸の位置関係を調べよ。

(i)　$y=2x^2-5x+2$　　(ii)　$y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$　　(iii)　$y=x^2+6x+10$

(2)　2 次関数 $y=x^2+2x+m$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

[解答]

(1)(i)　2 次方程式 $2x^2-5x+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot2=9>0$$

よって，x 軸と異なる 2 点で交わる

(ii)　2 次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=0$ の判別式を D とすると

$$D=1^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

よって，x 軸と接する

(iii)　2 次方程式 $x^2+6x+10=0$ の判別式を D とすると

$$D=6^2-4\cdot1\cdot10=-4<0$$

よって，x 軸と共有点をもたない

(2)　2 次方程式 $x^2+2x+m=0$ の判別式を D とすると

$$D=2^2-4\cdot1\cdot m=4-4m$$

2 次関数のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は $D>0$ である。

よって，$4-4m>0$ より $m<1$

第 9 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

2次方程式 $x^2+3x+4=0$ の判別式を D とすると,

$D=3^2-4\cdot1\cdot4=-7<0$ [A]

よって，グラフと x 軸の位置関係は,

共有点をもたない。

[A]　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の位置関係は，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ の符号を調べる。
$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる2点で交わる
$D=0 \Longleftrightarrow$ 接する
$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

2

[正解] イ：②

[解説]

2次方程式 $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ の判別式を D とすると,

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot\frac{1}{4}=0$ [B]

よって，グラフと x 軸の位置関係は,

接する。

[B]　$D=0 \Longleftrightarrow$ 接する

3

[正解] ウ：①

[解説]

2次方程式 $2x^2+3x+1=0$ の判別式を D とすると,

$D=3^2-4\cdot2\cdot1=1>0$ [C]

よって，グラフと x 軸の位置関係は,

異なる2点で交わる。

[C]　$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる2点で交わる

4 [正解] エ：④

[解説]

2 次方程式 $2x^2-4x+m=0$ の判別式を D とすると,

$$D=(-4)^2-4\cdot 2\cdot m=16-8m$$

グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるための条件は

$D>0$ である。 [D]

よって,

$$16-8m>0$$
$$-8m>-16$$
$$\boldsymbol{m<2}$$

[D]　$D>0 \iff$ 異なる 2 点で交わる